

一类具有逐段常变量扰动系统的渐近概周期解

姚慧丽, 张娜, 薛寒

(哈尔滨理工大学应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 针对一类具有逐段常变量扰动系统的渐近概周期解的存在性问题进行了研究. 具有逐段常变量的微分方程不仅是微分方程, 它还具有差分方程的性质, 是离散和连续的统一. 利用渐近概周期函数唯一分解性质, 讨论了相关差分方程的渐近概周期序列解, 得到了相关方程存在唯一有界渐近概周期解的条件, 然后利用指数二分法及压缩映射原理讨论了所要研究的具有逐段常变量的扰动系统渐近概周期解的存在性及唯一性.

关键词: 逐段常变量; 扰动系统; 指数二分; 压缩映射原理; 渐近概周期解

DOI: 10.15938/j.jhust.2015.01.018

中图分类号: O177.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2015)01-0089-06

Asymptotically Almost Periodic Solutions for a Class of Perturbed Systems with Piecewise Constant Argument

YAO Hui-li, ZHANG Na, XUE Han

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Existence of asymptotically almost periodic solutions for a class of perturbed systems with piecewise constant argument is investigated. Differential equations with piecewise constant argument are not only differential equations, they also have the nature of the difference equations, discrete and continuous unity. Using unique decomposition theorem of asymptotically almost periodic functions, XUE Han asymptotically almost periodic sequence solutions of related difference equations are discussed and the conditions of related equations with only bounded asymptotically almost periodic solution are obtained, then by using the exponential dichotomy and contraction mapping theory, the existence and uniqueness of asymptotically almost periodic solutions of the system is are discussed.

Key words: piecewise constant argument; perturbed system; exponential dichotomy; contraction mapping; asymptotically almost periodic solutions

0 引言

最早提出概周期函数理论的是丹麦数学家 H Bohr, H. Bohr 发现概周期性是从跨世纪难题黎曼猜想开始的, 并于 1925 - 1926 年在 Acta Math 上发

表了三篇关于概周期理论的文章^[1-3]. 之后许多学者开始研究微分方程的概周期型解, 具有逐段常变量的微分方程的概周期解^[4-6], 渐近概周期解和伪概周期解^[7-11]的存在性和唯一性现已经被广泛的研究, 研究方法是利用差分方程的概周期型序列解讨论了具有逐段常变量的微分方程的概周期型解的

收稿日期: 2014-05-14

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12511110).

作者简介: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, E-mail: Huili-yao@sohu.com;

张娜(1989—), 女, 硕士研究生;

薛寒(1990—), 女, 硕士研究生.

存在性. 自1974年 Fink^[2]研究了扰动体系 $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)$ 概周期解的存在性和唯一性后, 一些类似的扰动系统被广大的学者研究, 文^[3], ^[4]和^[5]分别研究了扰动系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon),$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, \mu) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)$$

概周期解的存在性. 将逐段常变量和扰动系统结合起来的微分方程更具有广泛应用性, 文^[6]研究了具有逐段常变量扰动系统的概周期解的存在性, 但目前, 利用差分方程的渐近概周期序列解研究具有逐段常变量扰动系统渐近概周期解的存在性问题的文献却很少, 本文针对方程(1)做了研究.

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-1) + f(t) + \varepsilon g(t, y(t), y(t-1), \varepsilon) \quad (1)$$

1 预备知识

定义1^[7] 函数 $f: R \rightarrow R^q$ 称为概周期的, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, f 的 ε -平移集 $T(f, \varepsilon) = \{\tau \in R: |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \forall t \in R\}$ 在 R 中相对稠密. τ 称为 f 的 ε -平移数. 用 $AP(R)$ 表示所有满足这样条件的函数集合.

定义2^[7] 序列 $\{x(n)\}_{n \in Z}$ 称为概周期的, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 它的 ε -平移集 $T(x, \varepsilon) = \{\tau \in Z: |x(n+\tau) - x(n)| < \varepsilon, \forall n \in Z\}$ 在 Z 上相对稠密. τ 称为 x 的 ε -平移数. 用 $AP(Z)$ 表示所有满足这样条件的序列的集合.

定义3^[7] 函数 $f \in C(R, R^q)$ 被称为是渐近概周期的, 如果 $f(x) = g(x) + \phi(x)$, 其中 $g(x) \in AP(R, R^q)$, $\phi(x) \in C_0(R, R^q) = \{\phi(x): \lim_{x \rightarrow \infty} |\phi(x)| = 0\}$, 用 $AAP(R)$ 表示所有满足这样条件的函数的集合.

定义4^[7] 序列 $\{x_n\}_{n \in Z}$ 称为渐近概周期的, 如果 $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, 其中 $x_1(n) \in AP(Z, R^q)$, $x_2(n) \in C_0(Z, R^q) = \{x(n): \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = 0, n \in Z\}$, 用 $AAP(Z)$ 表示所有满足这样条件的序列的集合.

定义5^[8] 函数 $y: R \rightarrow R^q$ 是方程(1)的一个解, 是指它满足:

- (i) y 在 R 上是连续的;
- (ii) y 的导数 y' 在 R 上(除了在 $t = n, n \in Z$)存

在, 在 $t = n, n \in Z$ 处单侧导数存在;

(iii) y 在区间 $(n, n+1), n \in Z$ 内满足方程(1).

考虑方程

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-1) + f(t), \quad t \in R \quad (2)$$

令 $X(t)$ 是方程 $x'(t) = A(t)x(t), t \in R$ 的基本矩阵解. 满足 $X(0) = I, I$ 是单位矩阵.

显然, 如果 $y(t)$ 是方程(2)的一个解, 则 $\{y(n)\}_{n \in Z}$ 满足非齐次差分方程

$$y(n+1) = C(n)y(n) + h(n), \quad n \in Z \quad (3)$$

其中

$$C(n) = X(n+1) [X^{-1}(n) + \int_n^{n+1} X^{-1}(u) B(u) du], \quad n \in Z$$

$$h(n) = X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) f(u) du, \quad n \in Z$$

定义6^[9] 对于 $n \in Z$, 假设 $C(n)$ 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 称线性差分方程

$$y(n+1) = C(n)y(n) \quad (4)$$

在 Z 上有一个指数二分, 如果存在正常数 K, α 和一个映射 $P(P^2 = P)$

满足

$$|Y(n)PY^{-1}(m)| \leq Ke^{-\alpha(n-m)}, \quad n \geq m.$$

$$|Y(n)(I-P)Y^{-1}(m)| \leq Ke^{-\alpha(m-n)}, \quad m \geq n.$$

这里的 $Y(n)$ 是差分方程(4)的基本矩阵解, 并满足 $Y(0) = I$.

称下列线性微分方程

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-1) \quad (5)$$

有一个指数二分, 如果差分方程(4)有一个指数二分.

引理1^[7] 函数 $g: R \times R^q \times R^q$ 被称作是关于 t 在 $R \times R^q \times R^q$ 上的一致渐近概周期函数, 当且仅当存在唯一的函数 $g_1 \in AAP(R \times R^q \times R^q)$ 满足 $g - g_1 \in C_0(R \times R^q \times R^q)$.

引理2^[7] 序列 $x_n \in AAP(Z, R^q)$ 的充分必要条件是存在一个函数 $f(x) \in AAP(R, R^q)$ 使 $f(n) = x(n), n \in Z$.

引理3^[7] 假设线性差分方程(4)在 Z 上有指数二分, 且有正常数为 K 和 α . 令 $\{h(n)\}_{n \in Z}$ 是有界序列, 那么非齐次差分方程(3)在 Z 上有唯一的有界解 $y(n)$ 并且对所有的 $n, |y(n)| \leq K(1 + e^{-\alpha})(1 - e^{-\alpha})^{-1} \sup_{n \in Z} |h(n)|$.

引理4^[10] (i) 存在 $K_0 > 0$, 满足

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq K_0, \quad 0 < t - s \leq 1$$

(ii) $A(t) \in AAP(R, R^q)$, 从而存在 R 的有界子集 C_ε 和相对稠子集 $P_\varepsilon = T(A, \varepsilon)$, 当 $\tau \in T(A, \varepsilon)$ 时有:

$$|X(t+\tau)X^{-1}(s+\tau) - X(t)X^{-1}(s)| \leq K_0 \varepsilon e^M, \\ 0 < s - t \leq 1, s \in R/C_\varepsilon$$

引理 5^[7] 假定 $A(t)$ 是概周期函数, 则 $\{X(n+1)X^{-1}(n) : n \in Z\}$ 是概周期序列.

引理 6^[7] 假定 $A(t)$ 是概周期函数, 则对于任意概周期函数 $f(t)$,

$$h(n) = X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) f(u) du$$

是概周期序列.

引理 7^[7] 假定 $C(n)$, $h(n)$ 是概周期序列. (4) 在 Z 上有指数二分, 则非齐次差分方程 (3)

有概周期序列解.

引理 8^[7] 假定 $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ 都是概周期函数, 且方程 (5) 满足指数二分, 则方程 (2) 有唯一的概周期解.

引理 9^[2] 假定 $B(t)$ 是概周期函数, 则 $C(n)$ 是概周期序列.

2 主要结果及证明

推论 1: 假定 $A(t)$ 是概周期函数, $f(t)$ 是渐近概周期函数, 则序列 $h(n)$ 是渐近概周期序列.

证明: 由 $f(t)$ 是渐近概周期函数 则

$$f(t) = g(t) + \varphi(t)$$

其中

$$g(t) \in AP(R), \varphi(t) \in C_0(R)$$

$$h(n) = X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) f(u) du = \\ X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) [g(u) + \varphi(u)] du = \\ X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) g(u) du + X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) \varphi(u) du$$

由引理 6 有

$$X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) g(u) du \in AP(Z)$$

下证

$$X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) \varphi(u) du \in C_0(Z)$$

$$\text{由 } |X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) \varphi(u) du| = \left| \int_n^{n+1} X(n+1) X^{-1}(u) \varphi(u) du \right|$$

$$1) |X^{-1}(u) \varphi(u)| du \leq K_0 \int_n^{n+1} |\varphi(u)| du$$

$$\text{及 } \varphi(x) \in C_0(R) \text{ 可得 } K_0 \int_n^{n+1} |\varphi(u)| du \rightarrow 0,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

综上, $h(n)$ 是渐近概周期序列.

命题 1: 假定 $C(n)$ 是概周期序列, $h(n)$ 是渐近概周期序列, (4) 在 Z 上有指数二分性, 则差分方程 (3) 的有界解是渐近概周期序列.

证明: 方程 (3) 满足指数二分, 则方程有有界解, 解的形式为

$$y(n) = \sum_{m \in Z} G(n, m+1) h(m), n \in Z.$$

其中

$$G(n, m+1) = \begin{cases} Y(n) P Y^{-1}(m+1), & m+1 \leq n \\ -Y(n) (I-P) Y^{-1}(m+1), & n < m+1 \end{cases}$$

由于 $h(n)$ 为渐近概周期序列, 则

$$y(n) = \sum_{m \in Z} G(n, m+1) [h_1(m) + h_2(m)]$$

其中

$$h_1(m) \in AP(Z), h_2(m) \in C_0(Z)$$

令

$$I_1 = \sum_{m \in Z} G(n, m+1) h_1(m)$$

$$I_2 = \sum_{m \in Z} G(n, m+1) h_2(m)$$

则有

$$I_2 = \sum_{m=-\infty}^{n-1} Y(n) P Y^{-1}(m+1) h_2(m) - \sum_{m=n-1}^{\infty} Y(n) (I-P) Y^{-1}(m+1) h_2(m), \\ \left| \sum_{m=-\infty}^{n-1} Y(n) P Y^{-1}(m+1) h_2(m) \right| = \left| \sum_{m=-\infty}^{n-1} Y(n) P Y^{-1}(m+1) h_2(m) \right| \leq \\ \left| \sum_{m=-\infty}^{n-1} Y(n) P Y^{-1}(m+1) h_2(m) \right| \leq \\ \sum_{m=-\infty}^{-N} K e^{-\alpha(n-m+1)} |h_2(m)| + \sum_{m=-N}^{n-1} K e^{-\alpha(n-m+1)} |h_2(m)| \leq \\ K \frac{e^{-\alpha(n+N+1)}}{1-e^{-\alpha}} |h_2(m)| + K \frac{e^{-\alpha(n+N+1)} (1-e^{-\alpha(n+N)})}{1-e^{-\alpha}} |h_2(m)| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

同理可证 I_2 的后一部分也趋于 0, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 所以 $I_2 \in C_0(Z)$.

由引理 7 有 $I_1 \in AP(Z)$.

命题得证.

命题 2: 假定 $A(t)$, $B(t)$ 是概周期函数, $f(t)$ 是渐近概周期函数, 方程 (5) 满足指数二分性, 则方程 (2) 有唯一的渐近概周期解.

证明: 由常数变分公式知方程(2)的解满足

$$y(t) = X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y(n) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f(u) du, t \in R$$

显然序列 $\{y(n)\}$ 满足非齐次差分方程(3)

由命题1, 上述非齐次差分方程有渐近概周期序列解 $\{y_0(n)\}$, $|y_0(n)| \leq \beta, \forall n \in Z$.

由 $y_0(n)$ 的唯一性, 有 $y_0(n) = y(n)$.

下证 $y(t)$ 是方程的渐近概周期解

由 $A(t), B(t) \in AP(R), f(t) \in AAP(R), y(n) = y_0(n) \in AAP(Z)$,

则

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

其中

$$f_1(t) \in AP(R), f_2(t) \in C_0(R)$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n)$$

其中

$$y_1(n) \in AP(Z), y_2(n) \in C_0(Z)$$

$$y(t) = X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y(n) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f(u) du = X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] (y_1(n) + y_2(n)) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) (f_1(u) + f_2(u)) du =$$

$$X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y_1(n) +$$

$$X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y_2(n) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f_1(u) du + X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f_2(u) du$$

由引理8知

$$X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y_1(n) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f_1(u) du \in AP(R)$$

下证

$$X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y_2(n) +$$

$$X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f_2(u) du \in C_0(R) \mid X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] y_2(n) \mid \leq (K_0 + K_0 M) \mid y_2(n) \mid \rightarrow 0,$$

$$\text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\left| X(t) \int_n^t X^{-1}(u) f_2(u) du \right| \leq \left| K_0 \int_n^t f_2(u) du \right| \rightarrow 0, \text{ 当 } t$$

$\rightarrow \infty$ 时

综上, $y(t)$ 是渐近概周期函数

假设 $\overline{y(t)}$ 是方程另外一个渐近概周期解, 那么 $\overline{y(n)}$

是差分方程(3)的渐近概周期解, 由唯一性有 $\overline{y(n)} = y(n), \forall n \in Z$, 这就蕴含 $\overline{y(t)} = y(t), t \in R$, 即方程有唯一的渐近概周期解

在下面的研究中, 假定

$$\max\{|A(t)|, |B(t)|, |f(t)|\} \leq M$$

定理3 令 $r_0 = \sup_{t \in R} |\varphi_0(t)|$, 其中 $\varphi_0(t)$ 是逐段常量非齐次微分方程(2)在 R 上的唯一渐近概周期解, 当下列条件成立时:

(H₁). $g(t, y(t), y(\cdot)), \varepsilon$ 是关于 t 在 $R \times S \times S \times [\delta, \varepsilon_0]$ 上的一致渐近概周期函数, 对每个固定参数 ε 一致有界, 且满足 Lipschitz 条件

$$|g(t, x_1, y_1, \varepsilon) - g(t, x_2, y_2, \varepsilon)| \leq$$

$$M_0(\varepsilon_0) [|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$$

其中 $(t, x_1, y_1, \varepsilon), (t, x_2, y_2, \varepsilon) \in R \times S \times S \times [\delta, \varepsilon_0], S$ 是 R^q 的紧子集 S .

(H₂). $A(t), B(t)$ 是概周期函数, $f(t)$ 是渐近概周期函数, 方程(5)满足指数二分.

那么, 对于任意的常数 $r > r_0 > 0$, 存在一个充分小的 $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(r) > 0$ 满足方程(1)有唯一渐近概周期解 $y(t, \varepsilon)$ 在 $\varphi_0(t)$ 的 r 领域内, 对于每个固定的 $\varepsilon \in [\delta, \varepsilon^0]$. 并且, 如果 $g(t, y(t), y(\cdot)), \varepsilon$ 在 $(t, y(t), y(\cdot), \varepsilon) \in R \times S \times S \times [\delta, \varepsilon_0(\eta)]$ 上一致连续, 那么 $y(t, \varepsilon)$ 关于 ε 连续, 且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \varphi_0(t)$$

证明: 设 y 是方程(1)的解, 令 $x = y - \varphi_0(t)$

则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d\varphi_0(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(\cdot) +$$

$$\varepsilon g(t, x(t) + \varphi_0(t), x(\cdot) + \varphi_0(\cdot), \varepsilon) \quad (6)$$

令 $B = B(r, \varepsilon) = \{\varphi(t, \varepsilon) \in C(R \times [\delta, \varepsilon^0], R^q) \mid \text{对任意固定的 } \varepsilon \in [\delta, \varepsilon^0], \varphi(t, \varepsilon) \text{ 是渐近概周期的, } |\varphi(t, \varepsilon)| \leq r\}$

对于每一固定的 $\varepsilon \in [\delta, \varepsilon^0], B = B(r, \varepsilon)$ 是完备的矩阵空间, 在 R^q 上定义范数 $\|\cdot\| = \sup_{t \in R} \|\cdot\|$.

对任意的 $\varphi(t, \varepsilon) \in B$, 由命题2下述方程

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\cdot) + \varepsilon g(t, \varphi(t, \varepsilon) +$$

$$\varphi_0(t), \varphi(\cdot, \varepsilon) + \varphi_0(\cdot), \varepsilon) \quad (7)$$

有唯一的渐近概周期解

由常数变分公式, 解 $T\varphi(t, \varepsilon)$ 可表示成

$$T\varphi(t, \varepsilon) = X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] T\varphi(n, \varepsilon) +$$

$$\varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) g(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du \quad (8)$$

其中, $t \in R, n = [t], n < t \leq n+1$

显然, 序列 $\{T\varphi(n, \varepsilon)\}$ 满足非齐次差分方程

$$y(n+1) = C(n) y(n) + \varepsilon h(n, \varepsilon) \quad (9)$$

其中,

$$C(n) = X(n+1) [X^{-1}(n) + \int_n^{n+1} X^{-1}(u) B(u) du]$$

$$\varepsilon h(n, \varepsilon) = \varepsilon X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) g(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du$$

由引理 3 和命题 1 知, 差分方程 (7) 有唯一的渐近概周期解 $y_0(n, \varepsilon)$ 且

$$T\varphi(n, \varepsilon) = y_0(n, \varepsilon)$$

下面证明 $T\varphi(t, \varepsilon) \in B$. 首先证明 $|T\varphi(t, \varepsilon)| \leq r$

我们可以选择 Lipschitz 常数 $M_0(\varepsilon)$ 是关于 ε 的非减函数, 选择充分小的 ε_1 满足

$$2K_0 [K_0(M+1) K(1+e^{-\alpha}) (1-e^{-\alpha})^{-1} + 1] \varepsilon M_0(\varepsilon) < 1, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1] \quad (10)$$

由 g 有界, 令

$$|g(t, x_1, y_1, \varepsilon)| \leq M_1,$$

$$\forall (t, x_1, y_1, \varepsilon) \in R \times S \times S \times [0, \varepsilon_1]$$

选择充分小的 $\varepsilon_0(r)$ 满足 $\varepsilon_0(r) \leq \varepsilon_1$

$$K_0 [K_0(1+M) K(1+e^{-\alpha}) (1-e^{-\alpha})^{-1} + 1] \varepsilon M_1 \leq r, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(r)] \quad (11)$$

由引理 3

$$|T\varphi(n, \varepsilon)| \leq K(1+e^{-\alpha}) (1-e^{-\alpha}) \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\varepsilon h(n, \varepsilon)| \quad (12)$$

其中

$$|\varepsilon h(n, \varepsilon)| = \left| \varepsilon X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(u) g(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du \right| \leq \varepsilon K_0 M_1$$

那么, 对任意的 $\varphi(t, \varepsilon) \in B, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(r)]$, 由式 (8) (11) (12) 可得,

$$|T\varphi(t, \varepsilon)| \leq K_0(1+M) |T\varphi(n, \varepsilon)| + K_0 \varepsilon M_1 \leq K_0 [K_0(1+M) K(1+e^{-\alpha}) (1-e^{-\alpha})^{-1} + 1] \varepsilon M_1 \leq r, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(r)] \quad (13)$$

其次, 要证明 $T\varphi(t, \varepsilon)$ 是渐近概周期的.

由

$$A(t), B(t) \in AP(R), g(t, y(t), y([t]), \varepsilon) \in AAP(R), T\varphi(n, \varepsilon) \in AAP(Z)$$

则

$$g(t, y(t), y([t]), \varepsilon) = g_1(t, y(t), y([t]), \varepsilon) + g_2(t, y(t), y([t]), \varepsilon) \\ T\varphi(n, \varepsilon) = T\varphi_1(n, \varepsilon) + T\varphi_2(n, \varepsilon)$$

其中

$$g_1 \in AP(R \times R^q \times R^q \times R), g_2 \in C_0(R \times R^q \times R^q \times R) \\ T\varphi_1(n, \varepsilon) \in AP(Z), T\varphi_2(n, \varepsilon) \in C_0(Z)$$

$$T\varphi(t, \varepsilon) = X(t) \left[X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right] T\varphi_1(n, \varepsilon) + X(t) [X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du] T\varphi_2(n, \varepsilon) + \varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) g_1(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du + \varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) g_2(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du$$

固地有

$$I_2 = X(t) [X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du] T\varphi_2(n, \varepsilon) + \varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) g_2(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du \in C_0 \left[X(t) [X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du] T\varphi_2(n, \varepsilon) \right] \leq (K_0 + K_0 M) \left| \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du \right| T\varphi_2(n, \varepsilon) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, t \in R, n \in \mathbb{Z}, n < t \leq n+1 \left| \varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) g_2(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du \right| \leq \left| \varepsilon K_0 \int_n^t g_2(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) du \right| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, n < t \leq n+1$$

所以 $T\varphi(t, \varepsilon)$ 是渐近概周期的, 进而

$$T\varphi(t, \varepsilon) \in B$$

下面证明 T 是到自身的压缩映射.

对于任意的

$$\varphi(t, \varepsilon) \in B, \psi(t, \varepsilon) \in B, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(r)] \\ T\varphi(t, \varepsilon) - T\psi(t, \varepsilon) = X(t) [X^{-1}(n) + \int_n^t X^{-1}(u) B(u) du] [T\varphi(n, \varepsilon) - T\psi(n, \varepsilon)] + \varepsilon X(t) \int_n^t X^{-1}(u) [g(u, \varphi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \varphi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon) - g(u, \psi(u, \varepsilon) + \varphi_0(u), \psi(n, \varepsilon) + \varphi_0(n), \varepsilon)] du, n < t \leq n+1.$$

则

$$|T\varphi(t, \varepsilon) - T\psi(t, \varepsilon)| \leq 2K_0 [K_0(M+1) K(1+e^{-\alpha}) (1-e^{-\alpha})^{-1} + 1] \varepsilon M_1 \leq r$$

$$e^{-\alpha} (1 - e^{-\alpha})^{-1} + 1] \times \varepsilon M_0(\varepsilon) |\varphi(t, \varepsilon) - \psi(t, \varepsilon)|, \forall t \in R.$$

由式(10), $T: B \rightarrow B$ 是一个压缩映射, 蕴含着存在唯一的 $x(t, \varepsilon) \in B$, 满足

$Tx(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$, 因为 $x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) - \varphi_0(t)$, 所以 $y(t, \varepsilon)$ 是方程(1)的唯一渐近概周期解, 满足

$$|y(t, \varepsilon) - \varphi_0(t)| = |x(t, \varepsilon)| \leq r$$

因此, 有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \varphi_0(t)$.

3 结 语

本文对具有逐段常变量的扰动系统的渐近概周期解进行了研究, 结合相关的差分方程的渐近概周期序列解, 并利用指数二分法和压缩映射原理证明了一类具有逐段常变量扰动微分方程在一定的条下存在唯一的渐近概周期解.

参 考 文 献:

- [1] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionne I [J]. Acta. Math, 1925, 45: 19 - 127.
- [2] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionne II [J]. Acta Math, 1925, 46: 101 - 214.
- [3] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionne III [J]. Acta Math, 1926, 47: 237 - 281.
- [4] YUAN Rong, HONG Jialin. The Existence of almost Periodic Solutions for a Class of Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Science in china, 1997, 28: 1439 - 1450.
- [5] ZHUANG Rongkun. Existence of Almost Periodic Solutions to Nth-Order Neutral Differential Equations with Piecewise Constant Arguments [J]. Applied Analysis, 2012: 1 - 10.
- [6] 王丽, 张传义. 带逐段常变量的二阶中立型延迟微分方程的概周期解 [J]. 数学学报, 2010, 53(2): 227 - 232.
- [7] 孟晨辉, 张传义. 逐段常变量微分方程渐近概周期解的存在性 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006, 38(8): 1399 - 1402.
- [8] 牛晶, 王似龙. 逐段常变量微分方程的渐近概周期解 [J]. 黑龙江大学学报, 2010, 27(3): 319 - 322.
- [9] YUAN Rong, PIAO Daxiong. Pseudo Almost Periodic Solutions of Differential Equations with Piecewise Constant Arguments [J]. Applicable Analysis, 1999, 73(3-4).
- [10] PIAO Daxiong. Pseudo Almost Periodic Solutions for the Systems of Differential Equations with Piecewise Constant [J]. SCIENCE IN CHINA, 2001, 44(9): 1156 - 1161.
- [11] ZHUANG Rongkun, YUAN Rong. The Existence of Pseudo Almost Periodic Solutions of Third-Order Neutral Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Acta Math, 2013, 29(5): 943 - 958.
- [12] FINK A M. Almost Periodic Differential Equations, Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 377.
- [13] 林木仁. 扰动系统概周期解和有界解的存在性 [J]. 数学物理报, 2002: 60 - 71.
- [14] 魏臻. 某类扰动系统的概周期解和有界解的存在唯一性 [J]. 福建师范大学福清分校学报, 2009, 2, 31 - 46.
- [15] XIA Yonghui, LIN Muren, CAO Jinde. The Existence of almost Periodic Solutions of Certain Perturbation Systems [J]. Math. Anal. 2005, 310: 81 - 96.
- [16] XIA Yonghui, HUANG Zhenkun, HAN Maoan. Existence of almost periodic solutions for forced perturbed systems with piecewise constant argument [J]. MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS, 2007, 333: 798 - 816.
- [17] Zhang C. Almost Periodic Type Functions And Ergodicity [M]. Science Press/Kluwer London/New York, 2003.
- [18] 朴大雄. 带逐段常变量的微分方程的概周期解 [J]. 数学学报, 1999, 42: 749 - 756.
- [19] PAPASCHINOPOULOS G. Exponential Dichotomies, Topological Equivalence and Structural Stability for Differential equations with piecewise constant argument [J]. Analysis, 1994, 14(2/3): 239 - 247.
- [20] 江丽娜, 张传义. 带逐段常变量微分方程的伪概周期解 [J]. 应用泛函分析学报, 2007, 9: 56 - 62.

(编辑: 王 萍)